15/12/2017

Μαθημα 19ο
Διαφ. Γεωμ.

Ασκηση 1

Να αποδειξετε οτι $\forall r > 0$ το συνολο

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = r^2\}$$ (κυλινδρος)

Ειναι κανονικη επιφανεια. Βρειτε συστημα συντετ. γυρω απο καθε σημειο της

Λυση

Θεωρουμε την $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τυπο

$$F(x,y,z) = y^2 + z^2 - r^2$$

Κρισιμα σημεια : $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (0, 2y, 2z)$

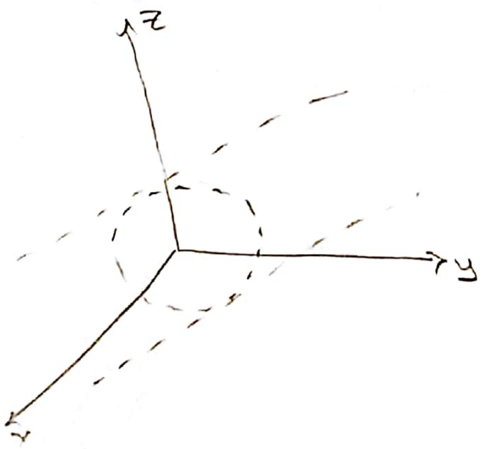
$\nabla F = 0 \Rightarrow y = z = 0$

Αρα $A = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ευθεια

Κρισιμες τιμες

$F(A) = F(x,0,0) = -r^2$

Οποτε 0 κανονικη τιμη της F και αρα $S = F^{-1}(0)$ κανονικη επιφανεια



Συστημα Συντετ.

$X_1(\theta, v) = (v, r\cos\theta, r\sin\theta)$

$X_1 : \underbrace{(0, 2\pi) \times \mathbb{R}}_{U} \to V \cap S$

$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(v, r, 0) \mid v \in \mathbb{R}\}$

Στο 0 εχω την ευθεια που μενει απ'εξω

Το συστηματα συντ. δεν ειναι μοναδικα

$X_2 : \underbrace{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{\tilde{U}} \to \tilde{V}\cap S$

$X_2 = X_1$ με $\tilde{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(v,-r,0) \mid v\in\mathbb{R}\}$

Εχουμε $X_1(U) \times X_2(\tilde{U}) = S$

Ασκηση 2

Βρειτε τα κρισιμα σημεια και τις κρισιμες τιμες της

$f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$

Για ποιες τιμες της σταθερας $a\in\mathbb{R}$ ειναι το $f^{-1}(a)$ κανονικη επιφανεια

Λυση

$\nabla f = (2(x+y+z-1), 2(x+y+z-1), 2(x+y+z-1)) = \vec{0}$

$\Rightarrow x+y+z=1$

$A = \{(1-y-z, y, z) \in\mathbb{R}^3 / y,z\in\mathbb{R}\}$

Κρισιμες τιμες:

$f(A) = (1-y-z, y, z) = 0$

Αρα το $f^{-1}(a)$ κανονικη επιφανεια $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Σπιτι:

$f(x,y,z) = x^2y^2$

Άσκηση 3

Έστω καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα κ με $0 < \kappa(s) < \frac{1}{r}$ $\forall s \in I$ και πλαίσιο frenet $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$.

Θεωρούμε την $X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(s,v) = c(s) + r\left(\cos v\, \vec{n}(s) + \sin v\, \vec{b}(s)\right)$$

Δείξτε ότι η X είναι κανονική επιφ.

Λύση

$\|X_s \times X_v\| = |1 - r\cos v \cdot \kappa| \cdot r \neq 0$

Διότι αν τ αυτό $= 0 \Rightarrow 1 - r\kappa\cos v = 0 \Rightarrow 1 = r\kappa\cos v \leq r\kappa$

$\Rightarrow \kappa \geq \frac{1}{r}$ άτοπο

Άρα X κανον. επιφ.

Άσκηση 4

Δείξτε ότι το άθροισμα των κάθετων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφ. στο τυχαίο σημείο της, ως προς δύο κάθετες εφαπτομ. διευθύνσεις είναι ανεξάρτητο των διευθ. αυτών

Λύση

Θυμάμαι:

Τύπος Euler

$$k_n(\theta) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$$

$$k_n(\theta) + k_n(\theta + \pi/2) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta + k_1\cos^2(\theta + \tfrac{\pi}{2}) + k_2\sin^2(\theta + \tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= k_1 + k_2 = 2H(p)$$

Άσκηση (5)

Αποδείξτε ότι σε κάθε σημείο p μιας καμπύλης c που επί μιας επιφάνειας S με $K>0$ ισχύει ότι

$$K \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$$

Όπου k είναι η καμπυλότητα c στο p και k_1, k_2 οι κύρ. καμπ. της S στο p

Λύση

Έστω $p = c(s_0)$

Τότε :

Ισχύει επειδή $\| \langle x, y \rangle \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} \geq \langle x, y \rangle$

$k(p) = k(s_0) = \| \ddot{c}(s_0) \| \geq | \langle \ddot{c}(s_0), (N\circ c)(s_0) \rangle | = | \underline{\langle \dot{c}(s_0), (N\circ c)^{\cdot}(s_0) \rangle} | =$

$= |k_n(\dot{c}(s_0))| = | k_1(c(s_0)) \cos^2\theta_0 + k_2(c(s_0)) \sin^2\theta_0 | \overset{k>0}{=}$

$= |k_1(c(s_0))| \cos^2\theta_0 + |k_2(c(s_0))| \sin^2\theta_0 \geq \underset{\min\{|k_1|,|k_2|\}}{\lambda} (\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0) = \lambda$

Άσκηση 6

Αν μια παραμετρική επιφάνεια S έχει την ιδιότητα ότι $|k_1| \leq 1$ και $|k_2| \leq 1$ τότε είναι αλήθεια ότι κάθε καμπύλη c της S ικανοποιεί τη σχέση $|k| \leq 1$?

Λύση

Όχι

$S = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$c = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, 0 \right)$

Τότε $k_1 = k_2 = 0$ αλλά $k = 2 > 1$

Ασκηση 7

Αποδείξτε ότι κατά μήκος μιας ασυμπτωτικής καμπύλης c μιας κανονικής επιφάνειας S η καμπυλότητα Gauss είναι ≤ 0

Λύση

Έστω η $c: I \longrightarrow S$ ασυμπτωτική και έστω s_0 τέτοιο ώστε με απαγωγή σε άτοπο
$\bar{K}(c(s_0)) > 0$. Τότε $k_1(c(s_0))$ και $k_2(c(s_0))$ ομόσημα

$\Rightarrow k_n(c(s_0), \vec{v}) \neq 0 \quad \forall \vec{v} \in T_{c(s_0)}$ με $\|\vec{v}\| = 1$

Άτοπο αφού $k_n(\dot{c}(s_0)) = 0$

Ασκηση 8

Αποδείξτε ότι

1) $N_u \times N_v = \bar{K} x_u \times x_v$

2) Αν όλοι τοι εφαπτόμενοι επίπεδα μιας κανονικής επιφ. S είναι παράλληλα προς ευθεία τότε $\bar{K} = 0$

Λύση

1) $N_u = a x_u + b x_v$

$N_v = \tilde{a} x_u + \tilde{b} x_v$

$N_u \times N_v = (a\tilde{b} - \tilde{a} b) x_u \times x_v = \bar{K} \, x_u \times x_v$

2) Έστω $\vec{a}$ η διεύθυνση της ευθείας $\overset{\text{Υποθ.}}{\Longrightarrow} \langle N, \vec{a} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle N_u, \vec{a} \rangle = \langle N_v, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow N_u, N_v$ Γ.Ε $\overset{(1)}{\Longrightarrow} \bar{K} = 0$

Άσκηση 9

Θεωρούμε την παραμ. επιφ. $X:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με $X(u,v)=(u,v,e^u+e^v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

SOS

1) Να βρεθεί 1η και 2η θεμ. μορφή

2) Να υπολογιστεί η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτ. διευθ. $c'(1)$ όπου

$c(t)=X(t,t^2)$

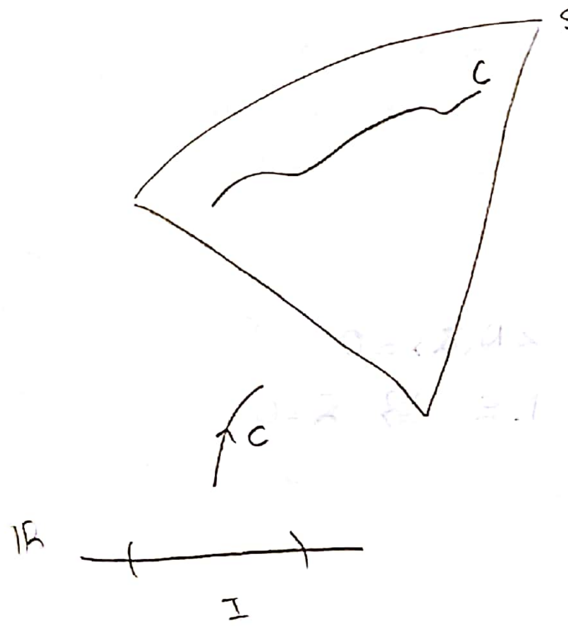
3) Να υπολογιστεί η κάθετη καμπυλ. στις εφαπτ. διευθ. των παρ. καμπυλών

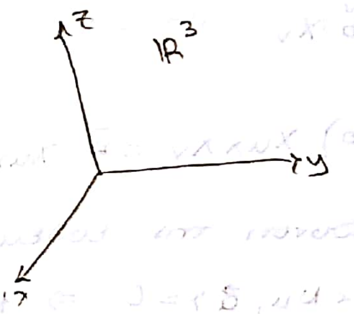
Λύση

1) 1η θεμ. μορφή: $E=1+e^{2u}$, $F=e^{u+v}$, $G=1+e^{2v}$

2η θεμ. μορφή: $e=\dfrac{e^u}{\sqrt{1+e^{2u}+e^{2v}}}$, $f=0$, $g=\dfrac{e^v}{\sqrt{1+e^{2u}+e^{2v}}}$

2)





$c(t)=X(u(t),v(t))$

$c'(t)=X_u\,u'+X_v\,v'=1\,X_u+(2t)\,X_v$

$$k_n(c'(1))=\frac{II_{c(t)}(c'(t))}{I_{c(t)}(c'(t))}=\frac{e(c(1))a^2+2ab\,f(c(1))+b^2g(c(1))}{E(c(1))a^2+2abF(c(1))+b^2G(c(1))}=$$

$$=\frac{e(1,1)1^2+(1\cdot 2)f(1,1)+2^2g(1,1)}{E(1,1)1^2+2(1\cdot 2)F(1,1)+2^2G(1,1)}=\frac{5e}{(5+9e^2)\sqrt{1+2e^2}}$$

3) $k_n(X_u)=e/E$, $k_n(X_v)=\dfrac{g}{G}$

Ασκηση 10

Δινεται η επιφανεια S με εξισωση S: $z = x^5 + y^5$

Αφου αποδειξετε οτι η S ειναι προσαν. βρειτε την απεικονιση Weingarten και την 2η θεμ. μορφη στο $(0,0,0)$

Λυση

$X(u,v) = (u, v, u^5 + v^5)$

1) $N = \dfrac{1}{\sqrt{25(u^8+v^8)+1}}(-5u^4, -5v^4, 1)$

Αρα S προσανατολισμενο

2) Εχουμε οτι $X(0,0) = (0,0,0)$

Εχουμε $e(0,0) = f(0,0) = g(0,0) = 0$ ειναι ισοπεδο

$p = (0,0,0)$ ισοπεδο αρα $II_p(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \langle L_p \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\forall \vec{v} \in T_pS \Rightarrow L_p = 0$

Άσκηση (11)

Θεωρούμε την π.ε. $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2 \right)$$

1) Δείξτε ότι X κανονική

2) $H=;$, $\bar{K}=;$, $k_1=;$, $k_2=;$

Κρατάει πολλές! ♥

Λύση

1) $\|X_u \times X_v\| = (1+u^2+v^2)^2 \neq 0 \Rightarrow X$ κανον. παραμ. επιφ.

2) $\bar{K} = -\dfrac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$, $H=0$

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - \bar{K}} = \frac{2}{1+u^2+v^2}, \quad k_2 = H - \sqrt{H - \bar{K}} = -\frac{2}{1+u^2+v^2}$$

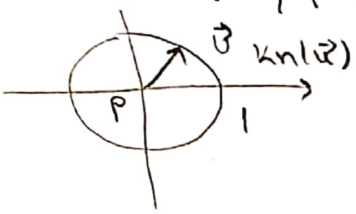
Άσκηση (12)

Θεωρούμε την $S : z = x^2 + \frac{1}{2} y^2$

1) Δείξτε ότι τα διανύσματα

$w_1 = (0,1,0)$, $w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ανήκουν στο T_pS , $p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$

2) $L_p(w_1) =;$, $L_p(w_2)=;$



Λύση

$X(u,v) = (u, v, u^2 + \frac{1}{2}v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

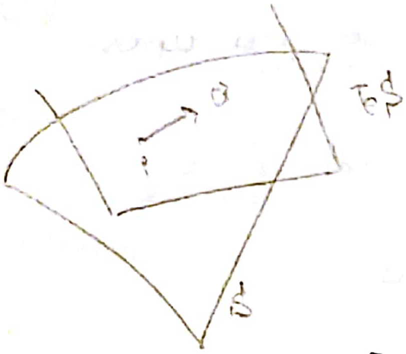
Έχουμε ότι $X\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) = p$

$N\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

1) $\langle N(\frac{1}{2},0), w_1 \rangle = 0 \Rightarrow w_1 \in T_pS$

$\langle N(\frac{1}{2},0), w_2 \rangle = 0 \Rightarrow w_2 \in T_pS$

Γενικά



$$u = a\, x_u + b\, x_v$$

$$L_p : T_p\tilde{S} \to T_p S$$

$$L_p(u) = a\, L_p(x_u) + b\, L_p(x_v) =$$

$$= -a\, dN_p(x_u) - b\, dN_p(x_v) = -a\, N_u - b\, N_v$$

$$-\ w_1 = a\, x_u(\tfrac{1}{2},0) + b\, x_v(\tfrac{1}{2},0) = 0\cdot x_u(\tfrac{1}{2},0) + 1\, x_v(\tfrac{1}{2},0)$$

$$w_2 = \tilde{a}\, x_u(\tfrac{1}{2},0) + \tilde{b}\, x_v(\tfrac{1}{2},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x_u(\tfrac{1}{2},0) + 0\cdot x_v(\tfrac{1}{2},0)$$

$$L_p(w_1) = L_p(x_v(\tfrac{1}{2},0)) = -N_u(\tfrac{1}{2},0) = (0,\tfrac{1}{2},0)$$

$$L_p(w_2) = L_p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, x_u(\tfrac{1}{2},0)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, N_v(\tfrac{1}{2},0) = (0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Άσκηση 13

Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο κατά μήκος μιας ασυμπτ. καμπ. c με κανον. επιφ. S ταυτίζεται με το επίπεδο προσκολλήσεως του c

Λύση

$$k_n(\dot{c}(s)) = 0 \quad \forall s$$

$$\Rightarrow\ II_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0 \quad \forall s \ \Rightarrow\ \langle (N\circ c)'(s),\ \dot{c}(s)\rangle = 0 \ \overset{k>0}{\Longrightarrow}$$

$$\langle (N\circ c)(s),\ \ddot{c}(s)\rangle = 0 \ \Rightarrow\ k(s)\langle (N\circ c)(s),\ \vec{n}(s)\rangle = 0 \ \Rightarrow$$

$$\langle N\circ c,\ \vec{n}\rangle = 0 \quad \forall s \ \Rightarrow\ N\circ c \parallel \vec{b} \ \Rightarrow\ N\circ c = \pm \vec{b}$$

$\Rightarrow$ άρα έχουμε το ζητούμενο

Άσκηση (14) $\quad$ Υπόδ: $\to k=0$

Αποδείξτε ότι αν μια ευθεία κείται εξ' ολοκλήρου σε μια κανον. Επιφ. S τότε αυτή είναι ασυμπτωτική

Λύση $\quad$ $\text{frenet}: \ddot{c} = k\vec{n} = 0$

$$k_n(\dot{c}(s)) = \mathrm{II}_{c(s)}(\dot{c}(s)) = \langle (N\circ c)', \dot{c}\rangle = -\langle N\circ c, \ddot{c}\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ c ασυμπτωτική $\quad$ $(k=0 \Rightarrow \ddot{c}=0)$

Άσκηση (15)

Κανον. παραμ. επιφ. $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (a\cosh u\cos v, a\cosh u \sin x, au)$, $a \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$

Βρείτε τις ασυμπτωτικές καμπύλες

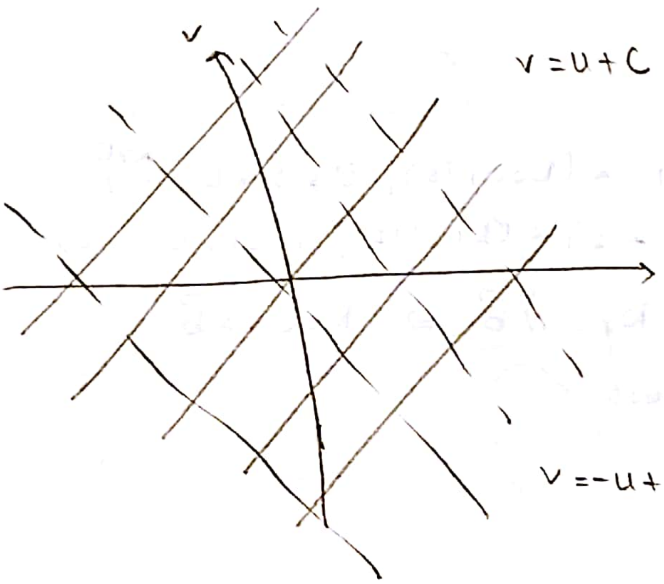
Έστω $c(t) = X(u(t), v(t))$ ασυμπτ

$\mathrm{II}_{c(t)}(c'(t)) = 0$

$$\xRightarrow{u'X_u + v'X_v = 0} (u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g = 0$$

$$-a(u')^2 + a(v')^2 = 0 \Rightarrow -(u')^2 + (v')^2 = 0 \Rightarrow v' = \pm u' \Rightarrow$$

$v = \pm u + C$, $C \in \mathbb{R}$



Γραμμές Καμπυλότητας

Ορισμός:

Μια κανον. καμπύλη $c: I \to S$ καμπυλότητα γραμμή αν το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t)$ είναι κύρια διεύθ. $\forall t \in I$

Θεώρημα Rodrigues

Η c είναι γραμμή καμπυλότητας της S αν.ν

$$(N \circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t), \quad t \in I$$

όπου $\lambda(t)$ είναι μια διαφ. συνάρτηση

Άσκηση 16

Αποδείξτε ότι αν το επίπεδο προσκολλήσεως μιας γραμμής καμπυλ. c μιας επιφαν. S δεν περιέχει καμία ασυμπτωτική διεύθυν. και σχηματίζει σταθερή γωνία με το εφαπτ. επιπ. της S κατά μήκος της c τότε η καμπύλη c είναι επίπεδη

Λύση

Υπόθεση $\langle N\circ c, \vec{b} \rangle = \text{σταθ} \quad \forall s \in I \xRightarrow{\text{Παραγ.}} \langle \underbrace{(N \circ c)'}_{(=\lambda(s)\vec{t}(s))}, \vec{b} \rangle + \langle N\circ c, \underbrace{\vec{b}'}_{(-\tau(s)\vec{n}(s))} \rangle = 0$

όπου c τ.κ

$\Rightarrow \tau \langle N\circ c, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow$

$\big($ αν $\exists s_0 \in I$ τ.ω $\langle (N\circ c)(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle = 0 \big)$

$$k_n(\dot{c}(s_0)) = k(s_0) \langle (N\circ c)(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle = 0 \quad \text{Άτοπο!}$$

$k(s_0) > 0$

$\Rightarrow \tau(s) = 0 \quad \forall s \Rightarrow c$ Επίπεδη

Ασκηση 17

Υποθετουμε οτι δυο επιφ S_1 και S_2 τεμνονται κατα μηκος μιας καμπυλης c. Αν η c είναι γραμ. καμπ της S_1 τοτε νδο

c γραμ. καμπ της S_2 $\Leftrightarrow$ $\angle(N_1 \circ c, N_2 \circ c) =$ σταθ

καθετο στο S_1 — καθετο στο S_2

Λυση

$(\Leftarrow)$ $\langle N_1 \circ c, N_2 \circ c\rangle =$ σταθ $\Rightarrow \langle \cancel{(N_1 \circ c)'}, N_2 \circ c\rangle + \langle N_1 \circ c, (N_2 \circ c)'\rangle = 0$

$\left(\lambda_1(s)\, \dot{c}(s) \right.$ οπου c γραμ. καμ της $S_1 \left. \right)$

$\Rightarrow \langle N_1 \circ c, (N_2 \circ c)'\rangle = 0 \quad \forall s$ (1)

Επειδη $\{\vec{t}, N_1 \circ c, N_2 \circ c\}$ βαση κατα μηκος της c

$(N_2 \circ c)' = a\vec{t} + b(N_1 \circ c) + d(N_2 \circ c) \quad \overset{\langle\,,\, N_1 \circ c\rangle}{\Longrightarrow}$

$\langle \underbrace{\cancel{(N_2 \circ c)'}, N_1 \circ c}_{0 \text{ λογω } (1)}\rangle = b + \langle N_1 \circ c, N_2 \circ c\rangle d$

Και

$\Rightarrow \langle \underbrace{\cancel{(N_2 \circ c)'}, N_2 \circ c}_{0}\rangle = b + \langle N_1 \circ c, N_2 \circ c\rangle + d$

$\|N_2 \circ c\|^2 = 1 \Rightarrow \langle (N_2 \circ c)', N_2 \circ c\rangle = 0$

$\Rightarrow b + d\gamma_{12} = 0$

$b\gamma_{12} + d = 0$ $\qquad \gamma_1 = \langle N_1 \circ c, N_2 \circ c\rangle$

Εχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & 1 \end{pmatrix} = 1 - \gamma_{12}^2 \neq 0$$ διοτι αν $\gamma_{12}^2 = 1 \Rightarrow$

$\langle N_1 \circ c, N_2 \circ c\rangle = 1 \Rightarrow \angle(N_1 \circ c, N_2 \circ c) = 0$ ή π

αδυν λογω της συγκεκρ καταστ.

$\Rightarrow b = d = 0$

$\Rightarrow (N_2 \circ c)' = a \cdot \vec{t}$ $\Rightarrow$ c γεωμ. καμπ της S_2

($\Leftarrow$)

Εστω c γεωμ. καμπ της S_2

$$\left(\langle N_1 \circ c, N_2 \circ c \rangle \right)' = \langle \underbrace{(N_1 \circ c)'}_{\lambda c'}, N_2 \circ c \rangle + \langle N_1 \circ c, \underbrace{(N_2 \circ c)'}_{\tilde{\lambda} c'} \rangle = 0$$

$\Rightarrow \measuredangle (N_1 \circ c, N_2 \circ c) =$ σταθ.

Ασκηση 18

Αποδειξτε οτι

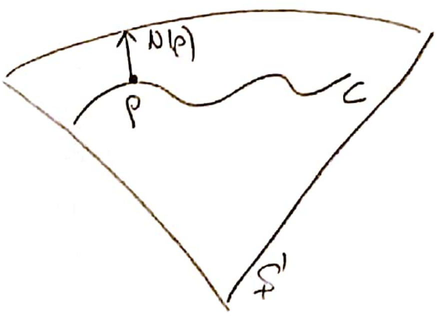
1) η εικονα μεσω της απεικονισης Gauss μιας καμπυλης c μιας επιφανειας S η οποια δεν περιεχει κανενα υπερβολικο ή ισοπεδο σημειο ειναι και καμπυλη της μοναδιαιας σφαιρας

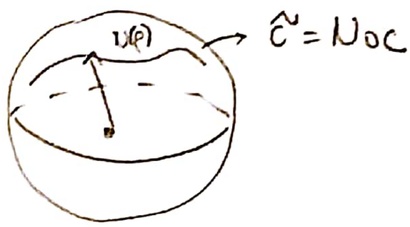
2) Αν η c ειναι γεωμ. καμπ της S νδο

$$K = |k_n \cdot k_N|$$

οπου K ειναι η καμπ της c (στο $p \in c$), k_n η καθ καμπ. (στο $p \in c$) και k_N ειναι η καμπυλ. της $N \circ c$ στο $N(p)$

Λυση





1) $\tilde{c}(s) = (N \circ c)(s) = N(u(s), v(s))$

$c(s) = X(u(s), v(s))$

$\tilde{c}' = N_u \cdot u' + N_v \cdot v'$

$K(c(s)) \neq 0 \ \forall \ \xRightarrow{N_u \times N_v = K X_u \times X_v} \ N_u, N_v$ Γ.Α

αν $\exists s_0 \in I$ τ.ω $\tilde{c}'(s_0) = 0 \Rightarrow u'(s_0) = v'(s_0) = 0$

Jοτε όμως $c'(s_0) = X_u \cdot u'(s_0) + X_v v'(s_0) = 0$ <u>ατοπο</u>

2) $k_N = \dfrac{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|}{\|\tilde{c}'\|^3}$

(καμπυλ. της $\tilde{c}$)

$\tilde{c}' = (N \circ c)' = \lambda \vec{t}$

c γρ. καμπη της $\vec{S}$

$\tilde{c}'' = \dot{\lambda} \vec{t} + \lambda \dot{\vec{t}} = \dot{\lambda} \vec{t} + \lambda (k \vec{n})$

$\tilde{c}' \times \tilde{c}'' = \lambda^2 k b \qquad |b| = 1$

$k_N = \dfrac{|\lambda^2 k|}{|\lambda|^3} = \dfrac{|k|}{|\lambda|}$

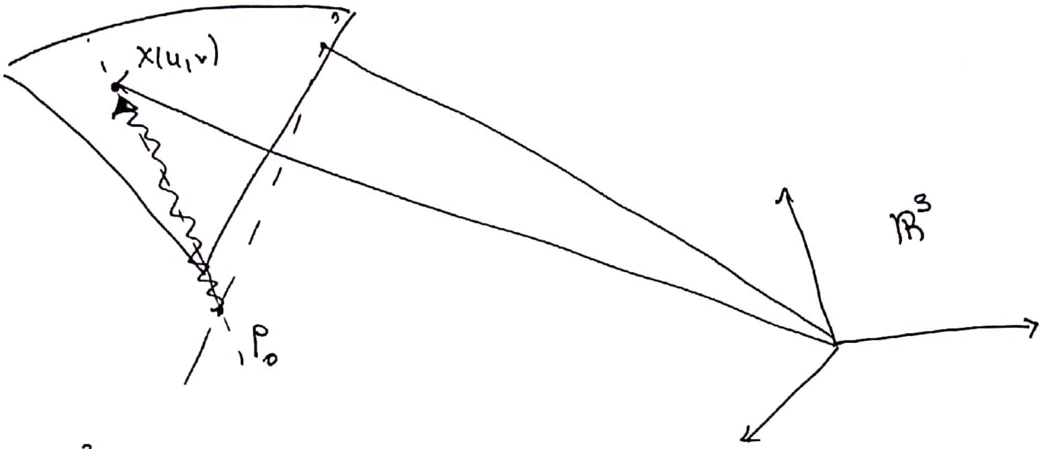
αλλα $\lambda = \langle (N \circ c)', \vec{t} \rangle = \langle (N \circ c)', \dot{c} \rangle = k_n(\dot{c}(s))$

Αρα $|k| = k_N \cdot |k_n| \Rightarrow K = |k_n \cdot k_N|$

Ασκηση 19

Αποδειξτε οτι αν ολες οι καθετες ευθ. μιας κανον επιφ. S διερχεται απο κοινο σημειο τοτε η S ειναι τμημα σφαιρας.

Λυση



$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(u,v) = \frac{1}{2} \| x(u,v) - p_0 \|^2$

$$\left.\begin{aligned} f_u &= \langle x_u, x - p_0 \rangle = 0 \\ f_v &= \langle x_v, x - p_0 \rangle = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \text{σταθ} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ τ.ω } f(u,v) = \alpha$$

$\| (x(u,v) - p_0 \|^2 = 2\alpha$